Corrigé type rattrapage 2024 Mécanique Analytique

Exercice N1 05/05

0.5

La condition d'extremum s'écrit $\delta S = 0$ or $S = S(q_i, \dot{q}_i)$ et donc

$$0 = \delta S = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$ 01

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt$$

0.5 0.5

Une intégration par partie du second terme donne

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} (\delta q_i) \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) \delta q_i dt + \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i \, dt$$ 0.5

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt + \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2}$$ 0.5

Wondershare PDFelement

Puisque au bord du chemin, on a les conditions suivantes

$$[\delta q_1(t_1), \ldots, \delta q_S(t_1)] = [\delta q_1(t_2), \ldots, \delta q_S(t_2)] = 0 \Rightarrow \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$ 01

Alors l'action est extremale si

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i dt = 0 \Rightarrow \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i = 0$$ 0.5

Finalement nous obtenons les équations de Lagrange.

Exercice N2 08/08

1- Système à deux degrés de liberté, on prend par exemple l'angle d'inclinaison du pendule θ, et la position de la masse M sur l'axe horizontal x. 01

2- Il n'y a que des forces concervatives : les forces de rappel des ressorts dérivant d'un potentiel ainsi que le poids.

Le lagrangien est donc

$$\mathcal{L} = T - U$$ 01

Où T est l'énergie cinétique totale et U l'énergie potentielle totale.

On choisit un référentiel galiléen avec un des axes selon l'axe de glissement de M (l'axe Ox).

Les masses M et m sont sont supposées ponctuelles. 0.5

On a $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}$ et $\overrightarrow{Om} = x\vec{u} + l\vec{v}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire le long de Ox et fixe, $\vec{v}$ vecteur unitaire le long de la tige supportant m et donc mobile).

On a donc

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{u} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{Om}}{dt} = \dot{x}\vec{u} + l\frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{x}\vec{u} + l\dot{\theta}\vec{w}$$ 0.5 0.5

Et l'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos(\vec{u},\vec{w})\right) = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right)$$ 01

Pour l'énergie potentielle il y a 2 ressorts et le poids

$$U = mgl(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k(-x)^2 = mgl - mglcos\theta + kx^2$$ 01

Donc le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta\right) - mgl + mglcos\theta - kx^2$$ 0.5

Les équations de Lagrange sont :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right) = 0 = \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0 \end{cases}$$

La première équation du mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) = 0 = -2kx - \frac{d}{dt}\left[(M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}cos\theta\right]$$ 0.5

$$\boxed{\Rightarrow 2kx + (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2sin\theta = 0}$$ 0.5

La deuxième équation du mouvement

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0 = -m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta - mglsin\theta - \frac{d}{dt}\left[ml^2\dot{\theta} + m\dot{x}lcos\theta\right]$$ 0.5

$$\Leftrightarrow -m\dot{x}l\dot{\theta}sin\theta - mglsin\theta - ml^2\ddot{\theta} - m\ddot{x}lcos\theta + m\dot{x}\dot{\theta}lsin\theta = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow mglsin\theta + ml^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}lcos\theta = 0}$$ 0.5

Wondershare PDFelement

Exercice N3 07/07

Dans un espace à deux dimensions (x, z), on considère un milieu matériel d'indice de réfraction $n = n(z)$. La distance parcourue ds est liée à l'indice de réfraction par $ds = cdt/n$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide. 0.5

1- Si l'on prend un élément de distance dans le plan (x, z) dans un milieu d'indice de réfraction $n = n(z)$, nous avons

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = vdt = \frac{c}{n(z)} dt \Rightarrow \boxed{dt = \frac{n(z)}{c} \sqrt{dx^2 + dz^2}} \quad 0.5$$

Si l'on définit la quantité

$$S = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{dx^2 + dz^2} = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{\left(\frac{dx^2}{dz^2} + 1\right)} dz = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{(x'^2 + 1)}\, dz \quad 0.5$$

Où $x' = {dx}/{dz}$ et minimiser le chemin optique consiste à minimiser le temps que mettra la lumière pour parcourrir le chemin de A à B et donc cela reviendera a minimiser la quantité S, qui est l'action. Nous pouvons déduire alors la fonctionnelle.

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + x'^2} = \mathcal{L}(x', z)} \quad 01$$

Joue le role d'un lagrangien. Notons que z joue le role du temps dans le formulation de Lagrange. On note que $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ est indépendant de x et cette dernière est alors une variable cyclique impliquant que son moment conjugué est une intégrale première.

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{n(z)}{c} \frac{x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \frac{n(z)}{c} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}} = \frac{n(z)}{c} sin\theta \quad 0.5$$

Avec $\quad sin\theta = {dx}/{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$

P_x est une intégrale première implique $\frac{n(z)}{c} sin\theta$ est une constante qui est la loi de Snell-Déscartes. 0.5

2- On faisons le méme raisonnement mais cette fois-ci en exprimant l'action en fonction de dx

$$S = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{\left(\frac{dz^2}{dx^2} + 1\right)} dx = \int_A^B \frac{n(z)}{c} \sqrt{(z'^2 + 1)}\, dx \quad 0.5$$

Où x joue le role du temps. Notons ici que $\boxed{\mathcal{L} = \frac{n(z)}{c} \sqrt{z'^2 + 1} = \mathcal{L}(z, z')}$ ne sépend pas de x et donc le Hamiltonien associé à $\mathcal{L}$ est une intégrale première. 0.5

$$H = P_z z' - \mathcal{L} = z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \mathcal{L} = \frac{n(z)}{c} \frac{z'^2}{\sqrt{z'^2 + 1}} - \frac{n(z)}{c} \sqrt{z'^2 + 1}$$
$$= \frac{n(z)}{c} \left(\frac{z'^2}{\sqrt{z'^2 + 1}} - \sqrt{z'^2 + 1} \right) = \frac{n(z)}{c} \left(\frac{z'^2 - z'^2 - 1}{\sqrt{z'^2 + 1}} \right) = -\frac{n(z)}{c\sqrt{z'^2 + 1}}$$
$$= -\frac{n(z)dx}{c\sqrt{dz^2 + dx^2}} = -\frac{n(z)}{c} sin\theta = constante \quad 0.5$$

3- Trouver la trajectoire du rayon de lumière consiste à trouver $z = z(x)$.

On a trouvé que

$$\frac{n(z)}{c\sqrt{z'^2+1}} = K \quad \boxed{0.25}$$

Où K est une constante a déterminer à partir des conditions initiales $z'(x=0) = 0$ et $z(x=0) = 0$ et sachant que $n(z) = n_0 + \lambda z \Rightarrow n(0) = n_0$

$$\Rightarrow K = \frac{n(0)}{c\sqrt{0+1}} = \frac{n_0}{c} \quad \boxed{0.25}$$

Nous pouvons écrire

$$\frac{n(z)}{c\sqrt{z'^2+1}} = K \Leftrightarrow \frac{n_0+\lambda z}{c\sqrt{z'^2+1}} = \frac{n_0}{c} \Rightarrow \left(\frac{n_0+\lambda z}{n_0}\right)^2 = z'^2 + 1$$

$$\Rightarrow z'^2 = \left(1+\frac{\lambda z}{n_0}\right)^2 - 1 \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = \pm\sqrt{\left(1+\frac{\lambda z}{n_0}\right)^2 - 1} \quad \boxed{0.25}$$

On pose $u = 1 + \frac{\lambda z}{n_0} \Rightarrow du = \frac{\lambda}{n_0}dz \Rightarrow dz = \frac{n_0}{\lambda}du$ et l'équation précédente sera

$$\frac{n_0}{\lambda}du = \pm\left(\sqrt{u^2-1}\right)dx \Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \pm\frac{\lambda}{n_0}dx \quad \boxed{0.25}$$

Faisons le changement de variable

$$u = cosh\theta \Rightarrow du = d(cosh\theta) = \frac{1}{2}\left[d\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)\right] = d\theta\left(\frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}\right) = sinh\theta.d\theta$$

$\boxed{0.25}$

$$du = sinh\theta.d\theta \quad \boxed{0.25}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{sinh\theta.d\theta}{\sqrt{cosh^2\theta - cosh^2\theta + sinh^2\theta}} = \frac{sinh\theta.d\theta}{\sqrt{sinh^2\theta}} = \pm\frac{\lambda}{n_0}dx \Rightarrow \boxed{d\theta = \pm\frac{\lambda}{n_0}dx}$$

$$\boxed{\theta = \pm\frac{\lambda}{n_0}x + \theta_0} \quad \boxed{0.25}$$

$$\Rightarrow u = cosh\theta = cosh\left(\frac{\lambda}{n_0}x + \theta_0\right) = 1 + \frac{\lambda z}{n_0}$$

$$\boxed{z = \frac{n_0}{\lambda}(u-1) = \frac{n_0}{\lambda}\left[cosh\left(\frac{\lambda}{n_0}x+\theta_0\right) - 1\right]} \quad \boxed{0.25}$$

Wondershare PDFelement